Đurđica Salamon Padjen • Boško Šego • Tihana Škrinjarić

MATEMATIKA 3

udžbenik sa zbirkom zadataka
za ekonomiste i komercijaliste
III. razred

prvo izdanje
Zagreb, 2014.

alka script

SADRŽAJ

KOMBINATORIKA

Prebrojavanje elemenata skupa

Permutacije, kombinacije i varijacije

Permutacije bez ponavljanja

Permutacije s ponavljanjem

Kombinacije bez ponavljanja

Kombinacije s ponavljanjem

Varijacije bez ponavljanja

Varijacije s ponavljanjem

Binomni teorem

1.

1. KOMBINATORIKA

1.1. Prebrojavanje elemenata skupa

Pretpostavljajući da znamo da skupovi A i B imaju konačno mnogo elemenata i da znamo broj elemenata skupa A i skupa B, pokušajmo odgovoriti na pitanje koliko elemenata ima u skupovima $A \cup B$ i $A \times B$ Pri tome se koristimo sljedećim oznakama: ako je S skup s konačno mnogo elemenata, **broj elemenata skupa *S*** ili **kardinalni broj skupa *S*** označavamo simbolom

$$k(S).$$

Primjer 1.

Odredimo broj elemenata sljedećih skupova:

$\mathrm{A} = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ i } x < 6\},\ \mathrm{B} = \{x : x \in \mathbf{Z} \text{ i } x > 3\},\ \mathrm{C} = \{x : x \in \mathbf{R} \text{ i } x \neq x\}.$

Rješenje

Očito je

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

tj. skup A ima 5 elemenata, što pišemo ovako: $k(A) = 5$. Skup

$$B = \{4, 5, 6, ...\}$$

nema najveći (maksimalni) element, tj. on je neomeđen odozgo, pa sadrži beskonačno mnogo elemenata. Budući da smo kardinalni broj skupa $k(S)$ definirali samo kad skup ima konačno mnogo elemenata, u našem primjeru $k(B)$ nije definirano.

Budući da je svaki realan broj jednak samom sebi, ne postoji realan broj koji ne bi bio jednak samom sebi, pa zaključujemo da je skup C prazan skup, tj.

$$C = \emptyset,$$

što znači da je

$$k(C) = 0$$

Primjer 2.

Zadani su skupovi

$A = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ i } x < 4\}$, $B = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ i } 3 < x \leq 6\}$, $C = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ i } 3 \leq x \leq 6\}$.

Rješenje

Očito je

$$A = \{1, 2, 3\},\ \ B = \{4, 5, 6\},\ \ C = \{3, 4, 5, 6\}.$$

pa je

$$D = \mathrm{A} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Dakle,

$$k(D) = 6.$$

Lako se može provjeriti da je u ovom slučaju

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B).$$

Budući da je

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

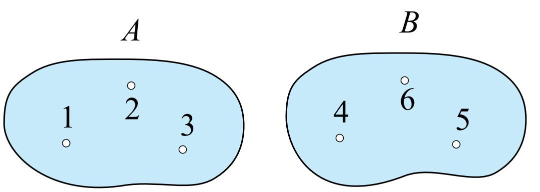
u ovom je slučaju

$$k(A \cup C) \neq k(A) + k(C),$$

jer je

$$k(A) + k(C) = 3 + 4 = 7.$$

Prikažimo skupove A, B i C pomoću **Euler-Vennovog dijagrama**.



slika 1.

Iz slike 1 vidimo da su skupovi A i B disjunktni, tj. $A \cap B = \varnothing$, a iz slike 2 da je 3 element i skupa A i skupa C, što znači da je

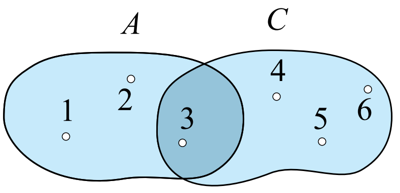
$$A \cap C = \{3\} \neq \varnothing.$$

I baš zbog toga što je $3 \in A$ i $3 \in C$ vrijedi

$$k(A \cup C) \neq k(A) + k(C),$$

jer broj 3 brojimo jednom pri računanju $k(A)$ i još jednom pri računanju $k(C)$, što znači da broj 3 brojimo dvaput pri računanju

$$k(A) + k(C).$$



slika 2.

S druge strane, broj 3 brojimo samo jednom pri računanju

$$k(A \cup C).$$

Ovaj primjer sugerira sljedeći zaključak.

Za skupove A i B vrijedi:

(1) $$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$$

Posebno, ako su skupovi A i B disjunktni, onda je

(2) $$k(A \cup B) = k(A) + k(B).$$

Primjer 3.

Koristeći se skupovima

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ i } B = \{a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

verificirajmo formulu (1).

Rješenje

Dakle,

$$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, \text{ a } A \cap B = \{a_3, a_4\}.$$

Budući da je

$$k(A) = 4, k(B) = 4, \; k(A \cup B) = 6, \; k(A \cap B) = 2,$$

imamo da je

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = 2,$$

jer je

$$6 = 4 + 4 - 2.$$

Primjer 4.

Anketom je utvrđeno da od 1000 ispitanika 500 jede polubijeli, a 100 i bijeli i polubijeli kruh. Koliko ispitanika jede bijeli kruh?

Rješenje

Označimo s A skup ispitanika koji jedu bijeli, a s B skup ispitanika koji jedu polubijeli kruh. Na temelju podataka

$$k(A \cup B) = 1000, \;\; k(B) = 500, \;\; k(A \cap B) = 100,$$

i koristeći se formulom (1), dobivamo linearnu jednadžbu

$$1000 = k(A) + 500 - 100,$$

čije rješenje je

$$k(A) = 600.$$

Dakle, 600 od 1000 ispitanika jede bijeli kruh.

Primjer 5.

Proizvođač magnetnih vrpci za digitalna računala eksperimentalno je utvrdio da su prilikom proizvodnje moguća dva nedostatka na kolutu vrpce: vrpca može sadržavati utore ili magnetni sloj može biti nedovoljan. Testirajući 100 kolutova, proizvođač je zabilježio sljedeće:

15 kolutova ima utore na vrpcama,

12 ih ima vrpce s nedovoljnim magnetnim slojem,

7 ih ima oba nedostatka.

a) Koliko je neispravnih kolutova vrpce, tj. onih koji imaju bar jedan od navedenih nedostatka?

b) Koliko je ispravnih kolutova?

Rješenje

a) Označimo s A skup kolutova s utorom na vrpci, a s B skup kolutova kod kojih je magnetni sloj nedovoljan. Tada je

$$A \cup B$$

skup neispravnih kolutova, pa moramo izračunati $k(A \cup B)$.

Na temelju danih podataka imamo:

$$k(A) = 15,\ \ k(B) = 12,\ \ k(A \cap B) = 7.$$

Uvrštavajući ove vrijednosti u jednakost (1) dobivamo,

$$\begin{aligned} k(A \cup B) &= k(A) + k(B) - k(A \cap B) = \\ &= 15 + 12 - 7 = \\ &= 20. \end{aligned}$$

Dakle, 20 je kolutova neispravno.

b) Budući da je 20 kolutova neispravno, to ih je

$$100 - 20 = 80$$

ispravno.

Jednakost (1) može se proširiti i na uniju od 3 skupa.

Ako su A, B i C skupovi s konačno mnogo elemenata, onda je

$$\textbf{(3)} \qquad k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - k(A \cap C) -$$
$$- k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C).$$

Primjer 6.

U razredu su 34 učenika. Od toga njih 18 uči engleski, 15 njemački, 12 francuski, 5 engleski i njemački, 5 engleski i francuski. Samo 3 učenika uče sva tri jezika. Koliko učenika uči i njemački i francuski ako svaki učenik u razredu uči barem jedan od navedena tri strana jezika?

Rješenje

S E označimo skup učenika koji uče engleski, s NJ skup učenika koji uče njemački, s F skup učenika koji uče francuski. Na temelju danih podataka imamo:

$$k(E \cup NJ \cup F) = 34,\ \ k(E) = 18,\ \ k(NJ) = 15,\ \ k(F) = 12,$$
$$k(E \cap NJ) = 5,\ \ \mathrm{k}(E \cap F) = 5,\ \ k(E \cap NJ \cap F) = 3.$$

Uvrštavajući navedene podatke u jednakost

$$k(E \cup NJ \cup F) = k(E) + k(NJ) + k(F) - k(E \cap NJ) -$$
$$- k(E \cap F) - k(NJ \cap F) + k(E \cap NJ \cap \mathrm{F}),$$

dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$34 = 18 + 15 + 12 - 5 - 5 - k(NJ \cap F) + 3.$$

Rješenje je

$$k(NJ \cap F) = 4.$$

Prema tome, 4 učenika uče njemački i francuski.

Česte su situacije u kojima treba odrediti broj elemenata skupa koji je Kartezijev umnožak dvaju ili više skupova. Tada posebno treba uočiti je li poredak skupova bitan jer se može, za *neke* skupove A i B, dogoditi da ima smisla skup $A \times B$, ali ne i skup $B \times A$. Ilustrirat ćemo navedeno primjerom.

Primjer 7.

U restoranu za ručak nude 3 vrste juha i 5 glavnih jela. Koliko različitih jelovnika ima taj restoran ako se jelovnik sastoji od jedne juhe i jednog glavnog jela?

Rješenje

Iz slike 3 očito je da je broj različitih jelovnika u tom restoranu 15. Označimo li s

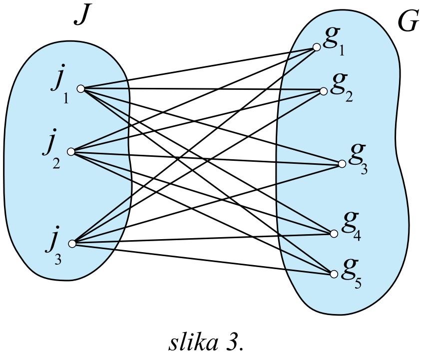
$$J = \{j_1, j_2, j_3\}$$

skup juha, a s

$$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5,\}$$

skup glavnih jela, tada je skup mogućih jelovnika

$$M = \{(j_1, g_1), (j_1, g_2), ..., (j_3, g_5)\},$$



slika 3.

Lako se može utvrditi da je

$$k(M) = 15.$$

Napominjemo da nije element skupa M i da uopće ne razmatramo elemente tog tipa, jer implicite podrazumijevamo da se glavno jelo služi nakon juhe (kao što je uobičajeno u Hrvatskoj).

Uočimo da je skup M Kartezijev umnožak skupova J i G, tj.

$$M = J \times G.$$

U ovom je primjeru

$$k(J) = 3,\ k(G) = 5,$$

a broj elemenata skupa M

$$k(M) = k(J) \cdot k(G) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Ovaj zaključak vrijedi i općenito:

Ako je A skup s konačno mnogo elemenata m, a B skup s konačno mnogo elemenata n, onda broj elemenata skupa $A \times B$ iznosi $m \cdot n$, tj.

(4) $$k(A \times B) = k(A) \cdot k(B).$$

Sljedeći primjer ukazuje na mogućnost da se formula (4) poopći i na slučaj kada imamo Kartezijev umnožak i više od dva skupa.

Primjer 8.

Pretpostavimo da se telefonski brojevi sastoje od tri znamenke dekadskog sustava.

a) Pokažite na koji način možemo te brojeve razmatrati kao elemente Kartezijeva umnoška.

b) Koliko različitih telefonskih brojeva možemo dobiti koristeći se tim trima znamenkama?

Rješenje

a) Neka je

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \text{ a}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Budući da telefonski brojevi ne počinju znamenkom 0, to skup svih mogućih troznamenkastih telefonskih brojeva možemo prikazati kao skup

$$T = E \times D \times D.$$

Dakle, elementi skupa T su uređene trojke kojih je prva komponenta iz skupa E, a druga i treća iz skupa D.

b) Za prvu znamenku možemo uzeti bilo koji element iz skupa E. Budući da je $k(E) = 9$, za prvu znamenku imamo 9 kandidata. Za 2. znamenku imamo $k(D) = 10$ kandidata, jer je uzimamo iz skupa D. Dakle, za prvu i drugu znamenku imamo ukupno $9 \cdot 10 = 90$ različitih parova. Za 3. znamenku imamo, također, 10 kandidata, pa za troznamenkasti telefonski broj imamo ukupno $90 \cdot 10 = 900$ kandidata.

Ovaj smo primjer mogli riješiti poopćavajući formulu (4) jer vrijedi sljedeće pravilo:

Za tri konačna skupa *A*, *B* i *C* vrijedi:

(5) $$k(A \times B \times C) = k(A) \cdot k(B) \cdot k(C),$$

ili još općenitije, za konačne skupove vrijedi:

(6) $$k(A1 \times A2 \times \ldots A_n) = k(A_1) \cdot k(A_2) \cdot \ldots \cdot k(A_n).$$

1.2. Permutacije, kombinacije i varijacije

U ovoj točki razmatramo probleme prebrojavanja broja načina da se određeni objekti (elementi nekog skupa) poredaju. Pritom se koristimo i igrom **mastermind** koja se navodi kao primjer takmičenja dva igrača u oštroumnosti, logici i pamćenju. Cilj je igre pogoditi tajni kôd koji formiraju obojeni čepići. Za nas je tajni kôd redak sastavljen od četiri obojena čepića koji se biraju (eventualno s ponavljanjem, što ćemo uvijek posebno naglasiti) između crvenih (C), žutih (Ž), smeđih (S), zelenih (Z), plavih (P) i narančastih (N) čepića, kojih je međusobni poredak bitan (dakle, tajni kôd ZSCN razlikujemo od kôda NCSZ). Prilikom formuliranja šest osnovnih problema posebno navodimo kojim čepićima "igramo" i dopuštamo li da u tajnom kôdu budu dva ili više čepića iste boje.

1.2.1. Permutacije bez ponavljanja

Problem 1.

Pretpostavimo da igramo mastermind sa sljedeće 4 boje: crvenom, plavom, žutom i zelenom. Na koliko različitih načina možemo poredati četiri čepića ako su svi različitih boja?

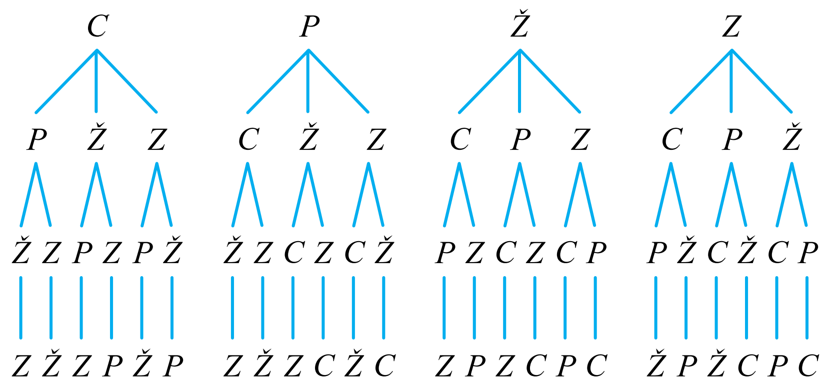
Rješenje

Mogući su ovi poreci:

CPŽZ	PCŽZ	ŽCPZ	ZCPŽ
CPZŽ	PCZŽ	ŽCZP	ZCŽP
CŽPZ	PŽCZ	ŽPCZ	ZPCŽ
CŽZP	PŽZC	ŽPZC	ZPŽC
CZPŽ	PZCŽ	ŽZCP	ZŽCP
CZŽP	PZŽC	ŽZPC	ZŽPC

Ove mogućnosti mogu se slikovito predočiti tzv. “stablom” (slika 4).

Uočimo da imamo ukupno 24 različita poretka navedenih čepića, tj. da pomoću navedena 4 raznobojna čepića možemo formirati ukupno 24 (različita) tajna kôda.



slika 4.

Do ovog rezultata mogli smo doći koristeći se formulom (4). Naime, za prvu poziciju (recimo, krajnju lijevo) imamo na raspolaganju sva 4 čepića kojima igramo mastermind, za drugu preostala 3, za treću preostala 2, a za posljednju četvrtu poziciju samo 1 čepić. Dakle, ukupan broj različitih poredaka jest

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Bilo koji način svrstavanja *n* različitih elemenata, ako je poredak tih elemenata bitan, predstavlja jednu **permutaciju** tih elemenata.

Primjer 9.

Koliko se različitih (ne nužno suvislih) troslovčanih riječi može formirati od slova od kojih je sastavljena riječ RIS?

Rješenje

Moguće je formirati sljedeće riječi:

RIS IRS SRI

RSI ISR SIR

Dakle, ukupno je 6 različitih permutacija. Pri tome smo navedene permutacije dobili tako da smo svako slovo stavili na prvo mjesto onoliko puta koliko je bilo moguće formirati permutacija od preostala dva slova. Tako je u prve dvije permutacije slovo R na prvom mjestu, a permutiraju se slova I i S. Slično, u trećoj i četvrtoj permutaciji na prvom je mjestu je slovo I, a permutiraju se slova R i S. Konačno, u petoj i šestoj permutaciji na prvom je mjestu slovo S, a permutiraju se elementi R i I.

Uočimo da je ukupan broj permutacija u ovom primjeru

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Primjer 10.

Neka su zadani skupovi

$$A = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ i } B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}.$$

Na koliko načina možemo odabrati po jedan element i iz skupa A i iz skupa B ako najprije biramo element iz skupa A?

Rješenje

Ako iz skupa A odaberemo element a_1, onda iz skupa B možemo izabrati b_1 ili b_2 ili b_3 ili b_4. Dakle, mogući su ovi uređeni parovi

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3) \text{ i } (a_1, b_4).$$

Slično vrijedi i ako iz skupa A odaberemo a_2. Tada su mogući ovi uređeni parovi:

$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) \text{ i } (a_2, b_4),$$

a ako izaberemo a_3 onda su mogući sljedeći uređeni parovi:

$$(a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3) \text{ i } (a_3, b_4).$$

Dakle, traženi izbor možemo izvršiti na

$$4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$$

načina.

Postoji opće pravilo za prebrojavanje – načelo (princip) multiplikacije (ili teorem o uzastopnom prebrojavanju), kojim ćemo se koristiti pri rješavanju sličnih primjera.

Načelo 1. (NAČELO MULTIPLIKACIJE)

Ako na n_1 načina možemo izabrati element iz skupa D_1, a na n_2 načina element iz D_2, onda na $n_1 \cdot n_2$ načina možemo izabrati po jedan element i iz skupa D_1 i iz skupa D_2, vodeći pri tom računa da je prvi izabrani element iz skupa D_1.

Uočimo da je formula (4) posljedica načela 1. Poopćenje formule (4) bila je formula (6), koja u stvari predstavlja posljedicu poopćenog načela multiplikacije.

Načelo 2. (POOPĆENO NAČELO MULTIPLIKACIJE)

Neka je zadano konačno mnogo skupova $D_1, D_2, ..., D_k$. Ako na n_1 načina možemo izabrati element iz skupa D_1, a na n_2 načina element iz D_2, a na n_3 načina element iz D_3 i tako dalje, onda na

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$$

različita načina možemo izabrati točno po jedan element iz svakog od skupova

$$D_1, D_2, ..., D_k$$

ako je prvi izabrani element iz D_1, drugi iz D_2, treći iz D_3 i tako dalje.

Primjer 11.

Na koliko načina možemo poredati prvih n prirodnih brojeva u niz?

Rješenje

Prvi broj niza uzimamo iz skupa

$$D = \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Budući da je

$$k(D) = n,$$

to možemo učiniti na n načina. Pretpostavimo da smo za prvi broj uzeli broj n_1. Sada drugi broj uzimamo iz skupa

$$D_1 = D \setminus \{n_1\}$$

a budući da je

$$k(D_1) = n - 1,$$

drugi broj možemo odabrati na n–1 način. Ponavljanjem navedenog postupka dolazimo do skupa

$$D_n = D \setminus \{n_1, n_2, ..., n_{n-1}\}$$

koji ima samo jedan element, što znači da posljednji član niza možemo odabrati samo na jedan način. Primjenom načela 2 zaključujemo da je moguće formirati

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

različita niza od brojeva 1, 2, ..., n. To ujedno znači da je broj permutacija od n različitih elemenata

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Označimo li s ***n*!** (čitamo "***n* faktorijela**") umnožak prvih n prirodnih brojeva, tj.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1,$$

onda vrijedi sljedeće pravilo:

Broj permutacija od *n* različitih elemenata jednak je

$$\boldsymbol{P_n = n!.}$$

Napomenimo da je prema dogovoru 0! = 1.

1.2.2. Permutacije s ponavljanjem

Problem 2.

Pretpostavimo da igramo mastermind s 4 čepića: dva crvena, jednim plavim i jednim zelenim. Na koliko različitih načina možemo sada poredati navedena 4 čepića?

Mogući su sljedeći poreci:

CCPZ CZCP PZCC

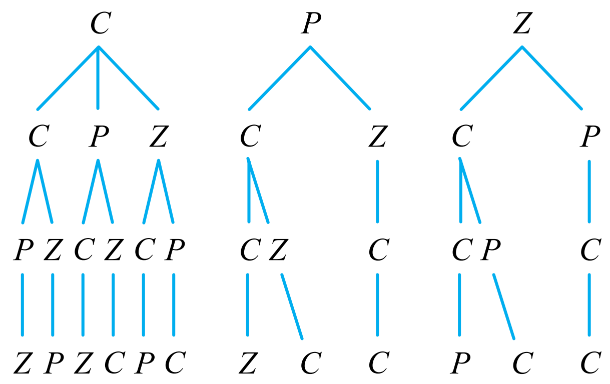
CCZP CZPC ZCCP

CPCZ PCCZ ZCPC

CPZC PCZC ZPCC.

Navedene mogućnosti možemo ilustrirati pomoću stabla (slika 5).

Uočimo da imamo ukupno 12 različitih permutacija.



slika 5.

Dakle, broj permutacija može se računati i u slučaju kada u nizu od n elemenata ima i *međusobno jednakih*. Očito je da se u ovom slučaju neće razlikovati permutacije u kojima je formalno izvršena zamjena pozicija međusobno jednakih elemenata. Permutacije kod kojih su dva elementa jednaka (ili više njih) nazivamo **permutacije s ponavljanjem**.

Primjer 12.

Na koliko načina možemo poredati tri elementa a, a, b?

Rješenje

Od elemenata a, a, b možemo formirati samo tri različite permutacije:

$$aab,\ aba,\ baa.$$

Budući da su dva elementa jednaka, možemo zamisliti da je ovaj slučaj nastao tako da smo najprije imali tri različita elementa a, b, c (od kojih možemo dobiti 3! različitih permutacija), a da smo zatim stavili $c = a$. Na taj se način 2! permutacija elemenata stopilo u jednu jedinu permutaciju elemenata a, a, b. Naime, ako je $c = a$, onda ne možemo razlikovati permutacije

$$abc \text{ i } cba$$

$$acb \text{ i } cab$$

i

$$bac \text{ i } bca.$$

Dakle, ukupan broj različitih permutacija elemenata a, a, b jest 3.

Primjer 13.

Koliko se različitih (ne nužno suvislih) četveroslovčanih riječi može sastaviti od slova koja formiraju riječ MAMA?

Rješenje

Lako se vidi da su to sljedeće riječi:

MAMA MMAA MAAM AMMA AMAM AAMM

Dakle, koristeći se slovima M, A, M, A, moguće je sastaviti ukupno 6 četveroslovčanih riječi. Uočimo da je

$$6 = \frac{24}{2 \cdot 2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}.$$

Primjer 14.

Na koliko načina možemo poredati brojeve, 1, 2, 2, 3, 3, 3 u niz?

Rješenje

U ovom primjeru ne možemo postupiti kao u prethodnom kada smo imali mali broj različitih poredaka. Budući da imamo 6 brojeva, možemo ih poredati na

$$P_6 = 6! = 720$$

načina u niz. Međutim, pri tome svi poreci neće biti različiti. Zbog toga što se znamenka 2 dva puta pojavljuje u nizu, a permutacije dvaju jednakih elemenata ne daju nove permutacije, imamo ukupno

$$\frac{P_6}{P_2}$$

(međusobno različitih) permutacija, a zbog toga što se znamenka 3 tri puta pojavljuje u nizu, imamo ukupno

$$\frac{P_6}{P_2 \cdot P_3}$$

različitih permutacija među navedenih 720. Dakle, zbog ponavljanja znamenaka 2 i 3 imamo ukupno

$$\frac{P_6}{P_2 \cdot P_3} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = 60$$

različitih poredaka brojeva 1, 2, 2, 3, 3, 3 u niz.

Poopćavajući dosadašnje razmatranje, dolazimo do sljedećeg zaključka.

Niz od n elemenata u kojem je po r_1, r_2, ..., r_m međusobno jednakih (pritom je $r_1 + r_2 + ... r_m \leq n$) ima

$$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_m!}$$

međusobno različitih permutacija.

U primjeru 13 imali smo

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

različitih riječi, a u primjeru 14

$$p((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B).$$

različitih poredaka u niz.

Primjer 15.

Koliko šesteroznamenkastih brojeva možemo napisati pomoću znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje

Budući da je međusobni poredak elemenata u ovom primjeru bitan, očito se radi o permutacijama, pa je moguće napisati

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

šesteroznamenkastih brojeva koristeći znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6 i to svaku točno jednom.

Primjer 16.

Koliko peteroznamenkastih brojeva možemo napisati koristeći znamenke 0, 0, 1, 2, 3? Naravno, ne uzimamo u obzir one brojeve koji počinju znamenkom 0, jer takve brojeve ne smatramo peteroznamenkastima.

Rješenje

Ako je prva znamenka 1, traženih peteroznamenkastih brojeva ima

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Identičan je slučaj ako je prva znamenka 2, odnosno 3, pa imamo ukupno

$$12 + 12 + 12 = 36$$

peteroznamenkastih brojeva.

1.2.3. Kombinacije bez ponavljanja

Problem 3.

Pretpostavimo da želimo igrati mastermind s 4 različite boje (od navedenih 6). Na koliko načina možemo to učiniti?

Budući da se mastermind igra sa 6 boja, a mi želimo igrati samo s 4, navedeni problem u stvari znači da je potrebno odrediti na koliko načina možemo izdvojiti 4 elementa (ne vodeći pri tome računa o njihovu poretku) iz šesteročlanog skupa

$$M = \{C, Ž, S, Z, P, N\}.$$

Mogući su sljedeći četveročlani podskupovi skupa M:

$M_1 = \{C, Ž, S, Z\}$, $M_2 = \{C, Ž, S, P\}$, $M_3 = \{C, Ž, S, N\}$,

$M_4 = \{C, Ž, Z, P\}$, $M_5 = \{C, Ž, Z, N\}$, $M_6 = \{C, Ž, P, N\}$,

$M_7 = \{C, S, Z, P\}$, $M_8 = \{C, S, Z, N\}$, $M_9 = \{C, S, P, N\}$,

$M_{10} = \{C, Z, P, N\}$, $M_{11} = \{Ž, S, Z, P\}$, $M_{12} = \{Ž, S, Z, N\}$,

$M_{13} = \{Ž, S, P, N\}$, $M_{14} = \{Ž, Z, P, N\}$, $M_{15} = \{S, Z, P, N\}$.

Uočimo da na 15 različitih načina možemo od 6 različitih boja izdvojiti 4.

Do navedenog rezultata mogli smo doći i sljedećim razmatranjem. Prema načelu 2 na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ načina možemo od 6 boja izdvojiti 4. (Naime, za prvo mjesto imamo 6 kandidata, za drugo $6 - 1 = 5$ i tako dalje). Ali, budući da pri tome ne razlikujemo njihov poredak, taj broj moramo dijeliti brojem permutacija četiri različita elementa, tj. s 4!. Dakle, ponovo imamo

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15,$$

što, množeći i brojnik i nazivnik navedenog razlomka s $2! = 2 \cdot 1$, možemo napisati i u obliku

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 2!} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Primjer 17.

Na koliko načina možemo iz skupa

$$A = \{1, 2, ..., n\}$$

izdvojiti r elemenata?

Broj elemenata skupa A je

$$k(A) = n.$$

Želimo iz skupa A uzeti r-člani podskup, tj. želimo izdvojiti skup

$$B = \{n_1, n_2, ..., n_r\} \subseteq A,$$

pri čemu je $n_i \neq n_j$ za sve $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., r\}$. Očito mora biti

$$r \leq n.$$

Prvi element iz skupa A možemo odabrati na n načina, drugi na $n-1$ način i tako dalje. Budući da posljednji r-ti element iz skupa A možemo odabrati na

$$n-(r-1) = n-r+1$$

način, prema načelu 2 iz skupa A možemo izdvojiti r-torku na

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1)$$

različita načina. Budući da kod skupa nije bitan poredak, a mi smo iz skupa A izdvojili uređenu r-torku, to znači da ćemo imati $r!$ jednakih podskupova čiji su elementi upravo komponente izdvojene uređene r-torke. Dakle, na opisani način od $r!$ uređenih r-torki dobivamo samo jedan r-člani podskup, pa ukupan broj različitih r-članih podskupova skupa A jest

$$K_n^r = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1)}{r!}.$$

Množenjem brojnika i nazivnika s

$$(n-r)! = (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1,$$

taj broj možemo pisati u sažetom obliku

$$K_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Svaki r-člani podskup n-članog skupa S zove se kombinacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata skupa S.

Broj kombinacija bez ponavljanja od n elemenata r-tog razreda jednak je

$$K_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

ili, skraćeno,

$$K_n^r = \binom{n}{r},$$

što se čita "*n* iznad (povrh) *r*".

Primjer 18.

Između 5 osoba treba izabrati 2 predstavnika. Na koliko se načina može izvršiti izbor?

Rješenje

Pretpostavimo da je riječ o osobama A, B, C, D i E. Mogući su sljedeći izbori:

$$\{A, B\},\ \{A, C\},\ \{A, D\},\ \{A, E\},\ \{B, C\}$$

$$\{B, D\},\ \{B, E\},\ \{C, D\},\ \{C, E\},\ \{D, E\}.$$

Dakle, naznačeni izbor može se izvršiti na 10 načina.

Zadatak smo mogli riješiti ne navodeći sve mogućnosti. Naime, budući da poredak izabranih predstavnika nije bitan, imamo broj kombinacija od 5 elemenata drugog razreda, tj.

$$K_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Probleme vezane za kombinatoriku treba posebno pažljivo i formulirati i rješavati. Često kod ovakve vrste problema neka konstatacija podrazumijeva neke činjenice koje su veoma važne za sam problem, ali se one posebno ne ističu ili se u njima pojavljuju riječi koje zamjenjuju više mogućnosti. Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 19.

Imamo 9 ispravnih i 6 neispravnih međusobno različitih proizvoda. Na koliko načina možemo izabrati uzorak od 7 proizvoda tako da u njemu budu:

a) 2 neispravna proizvoda,

b) barem 5 neispravnih proizvoda?

c) Možemo li izabrati takav uzorak od 7 proizvoda da u njemu ne bude niti jedan ispravan proizvod?

Rješenje

Označimo s

$$IP = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9\}$$

skup ispravnih, a s

$$NP = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$$

skup neispravnih proizvoda.

a) U uzorku trebaju biti točno dva neispravna proizvoda, a budući da se uzorak sastoji od 7 proizvoda, to znači da je u uzorku i 5 ispravnih proizvoda. Dakle, iz skupa *NP* treba uzeti 2 elementa, što možemo učiniti na

$$K_6^2 = \binom{6}{2} = 15$$

različitih načina, a iz skupa *IP* treba uzeti preostalih 5 elemenata, što možemo učiniti na

$$K_6^2 \cdot K_9^5 = 15 \cdot 126 = 1890$$

različitih načina.

Budući da treba istovremeno izabrati 2 elementa skupa *NP* i 5 elemenata skupa *IP*, prema načelu 1 to možemo učiniti na

$$K_9^5 = \binom{9}{5} = 126$$

različitih načina.

b) U uzorku sada treba biti barem 5 neispravnih proizvoda. To znači da je ili 5 neispravnih (i 2 ispravna) ili 6 neispravnih (i 1 ispravan) proizvoda. Dakle, traženi uzorak možemo izabrati na

$$K_6^5 \cdot K_9^2 + K_6^6 \cdot K_9^1 = \binom{6}{5}\binom{9}{2} + \binom{6}{6}\binom{9}{1} = 6 \cdot 36 + 1 \cdot 9 = 225$$

načina.

c) Očito je da ne možemo izabrati uzorak od 7 proizvoda takav da u njemu ne bude nijedan ispravan proizvod, jer bi to značilo da je svih 7 izabranih proizvoda neispravno, a njih biramo iz skupa *NP* koji ima samo 6 elemenata.

Uočimo da je u ovom primjeru bilo moguće izabrati najviše

$$K_{15}^{7}=\binom{15}{7}=6435$$

različitih uzoraka od 7 proizvoda.

Mnogi dokazi kod kojih treba odrediti ukupan broj elemenata nekog skupa mogu se provesti upravo koristeći se kombinacijama bez ponavljanja. Za ilustraciju navodimo teorem dobro poznat iz geometrije.

Teorem 1.

Broj dijagonala konveksnog n-terokuta jest

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Dokaz

n-terokut ima n stranica i n vrhova. Budući da 2 vrha određuju ili stranicu ili dijagonalu, ukupno je

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

stranica i dijagonala, što znači da ima

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

dijagonala.

Primjer 20.

Kojemu je konveksnom n-terokutu je broj dijagonala jednak broju stranica?

Rješenje

Prema dokazanom teoremu broj dijagonala konveksnog n-terokuta jest

$$\frac{n(n-3)}{2},$$

pa to znači da vrijedi

$$\frac{n(n-3)}{2}=n$$

ili

$$n^2-5n=0.$$

Budući da mora biti $n\in\mathrm{N}$, zaključujemo da nije

$$n=0,$$

nego da je

$$n=5.$$

Dakle, među svim konveksnim n-terokutima peterokut jedini ima svojstvo da mu je broj dijagonala jednak broju stranica.

1.2.4. Kombinacije s ponavljanjem

Problem 4.

Pretpostavimo da želimo igrati mastermind s 2 čepića bilo koje (ne nužno različite) boje. Na koliko načina to možemo učiniti?

Rješenje

Budući da se mastermind igra sa 6 boja, a mi želimo igrati samo s 2 čepića ne nužno različite boje, imamo sljedeće mogućnosti:

CC ŽŽ SS ZZ PP NN

CŽ ŽS SZ ZP PN

CS ŽZ SP ZN

CZ ŽP SN

CP ŽN

CN.

Dakle, navedeno izdvajanje možemo učiniti na 21 različiti način. Uočimo da ne tražimo konkretan kôd, nego samo želimo specificirati od kojih je boja kôd sastavljen, pa nam poredak nije bitan.

Također, uočimo da je

$$21 = \binom{7}{2} = \binom{6+2-1}{2}.$$

Primjer 21.

Na koliko načina možemo iz skupa

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

izdvojiti 4 elementa ako je dozvoljeno ponavljanje elemenata?

Rješenje

Drugim riječima, pitamo se koliko četvorki možemo formirati koristeći se elementima skupa A ako njihove komponente mogu biti i jednake, a pri tome se ne radi o uređenim četvorkama (ne razlikujemo njihov poredak). Mogući su sljedeći slučajevi:

(1) sve su komponente jednake,

(2) tri su komponente jednake,

(3) dvije su komponente jednake i

(4) sve su komponente različite.

Dakle, rastavili smo problem na 4 lakše rješiva potproblema.

(1) Ako su sve komponente jednake, važan je samo broj načina izbora prve komponente, a on je jednak broju

$$\binom{4}{1} = 4.$$

Uočimo da preostale komponente možemo izabrati na

$$\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = 1$$

način. Navedimo i eksplicite te mogućnosti

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4. \end{array}$$

(2) Ako su tri komponente jednake, onda to znači da prvu, a budući da poredak nije bitan, i još dvije komponente možemo izabrati na

$$\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}=\binom{4}{1}=4$$

načina, pa preostalu komponentu na

$$\binom{4-1}{1}=\binom{3}{1}=3$$

načina, tj. ukupno na

$$\binom{4}{1}\binom{3}{1}=12$$

načina možemo izvršiti naznačeni izbor, što lako možemo provjeriti ispisujući sve moguće slučajeve. Naime, imamo:

1 1 1 2	2 2 2 1	3 3 3 1	4 4 4 1
1 1 1 3	2 2 2 3	3 3 3 2	4 4 4 2
1 1 1 4	2 2 2 4	3 3 3 4	4 4 4 3

(3) Ako su dvije komponente jednake, onda to znači da su preostale dvije ili jednake (ali i različite od navedenih dviju) ili međusobno različite (a, ujedno, i različite od polaznih dviju jednakih). Dakle, imamo dva potproblema.

(3.1) Neka su preostale dvije komponente jednake. To znači da nas u stvari zanima na koliko načina od 4 elementa možemo izabrati 2 pri čemu poredak nije bitan. Vidjeli smo da to možemo učiniti na

$$K_4^2=\binom{4}{2}$$

načina. Dakle, u ovom potproblemu ukupan broj mogućih izbora jednak je

$$\binom{4}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{1}=\binom{4}{2}=6.$$

(3.2) Ako su dvije komponente jednake, a dvije se razlikuju i međusobno i od navedenih dviju jednakih, onda bismo traženi izbor mogli izvršiti na

$$\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}$$

načina kad bismo razlikovali poredak. Budući da poredak ne razlikujemo, to možemo učiniti na

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{2!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2}=12$$

načina. Dakle, na ukupno

$$6 + 12 = 18$$

načina možemo odabrato 4 elementa ako su 2 jednaka, što smo mogli utvrditi i ispisujući sve mogućnosti. Naime, za potproblem (3.1) imamo sljedeće mogućnosti:

1 1 2 2   2 2 3 3   3 3 4 4

1 1 3 3   2 2 4 4

1 1 4 4

a za potproblem (3.2)

1 1 2 3   2 2 1 3   3 3 1 2   4 4 1 2

1 1 2 4   2 2 1 4   3 3 1 4   4 4 1 3

1 1 3 4   2 2 3 4   3 3 2 4   4 4 2 3

(4) Budući da su sve komponente različite, to znači da se pitamo na koliko načina od 4 (različita) načina možemo izabrati 4 (također različita) elementa ako nije bitan njihov poredak. To je moguće učiniti na

$$K_4^4=\binom{4}{4}=1$$

način.

Dakle, konačno možemo zaključiti da iz skupa A možemo izdvojiti 4 elementa na

$$4 + 12 + 18 + 1 = 35$$

načina ako pri tome dozvoljavamo da se elementi ponavljaju.

Kombinacije s ponavljanjem jesu kombinacije u kojima se elementi mogu i ponavljati.

Broj kombinacija s ponavljanjem *r*-tog razreda od *n* elemenata računa se formulom

(7) $$\overline{K}_n^r=\binom{n+r-1}{r}$$

Koristeći se formulom (7), primjer 21 možemo riješiti na sljedeći način.

Budući da imamo 4 elementa koji se svi mogu ponavljati, to je $n = r = 4$, pa iz skupa A možemo izdvojiti 4 elementa na

$$\overline{K}_4^4 = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$$

načina.

Primjer 22.

U trgovini se mogu kupiti jabuke (J), grožđe (G), kruške (K) i naranče (N). Netko želi kupiti dva puta po 1 kilogram navedenog voća.

Rješenje

a) Mogući su sljedeći slučajevi:

JJ KK GG NN

JK KG GN

JG KN

JN.

b) Iz prethodnog dijela zadatka vidimo da se to može učiniti na 10 različitih načina. Do tog smo mogli doći i koristeći se formulom (7), jer se radi o kombinacijama s ponavljanjem drugog razreda od 4 elementa:

$$\overline{K}_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

1.2.5. Varijacije bez ponavljanja

Problem 5.

Pretpostavimo da igramo mastermind sa 6 boja: crvenom, žutom, smeđom, zelenom, plavom i narančastom. Koliko različitih kôdova možemo formirati koristeći se četirima čepićima različite boje?

Rješenje

Uočimo da su, primjerice, kôdovi

CŽSZ i CŽZS

različiti premda su sastavljeni od po jednog čepića crvene, žute, smeđe i zelene boje. Dakle, kod kôda je bitan i poredak čepića, a ne samo njihova boja. Zato naš problem rješavamo u dva koraka:

a) najprije izračunamo na koliko načina možemo od 6 raznobojnih čepića izdvojiti 4,
b) zatim izračunamo i broj načina da ta 4 izdvojena raznobojna čepića poredamo u jedan niz.

Od 6 *raznobojnih* čepića možemo izdvojiti 4 na

$$K_6^4 = \binom{6}{4} = 15$$

različitih načina, a ta četiri raznobojna čepića možemo poredati na

$$P_4 = 4! = 24$$

različita načina.

Budući da svaku od 15 mogućih kombinacija možemo poredati na 24 različita načina, zaključujemo da je broj različitih kôdova od četiri raznobojna čepića

$$K_6^4 \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360.$$

Primjer 23.

Koliko se dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može napisati pomoću znamenaka 0, 1, 2?

Rješenje

Budući da prva znamenka mora biti različita od nule, imamo sljedeće dvoznamenkaste brojeve:

$$\begin{array}{cc} 1\ 0 & 2\ 0 \\ 1\ 2 & 2\ 1 \end{array}$$

Dakle, za znamenku desetica odabrali smo znamenku

$$n_1 \in D_1 = \{1, 2\},$$

a za znamenku jedinica znamenku

$$n_2 \in D_2 = \{0, 1, 2\} \setminus \{n_1\},$$

pa imamo ukupno (načelo 1)

$$k(D_1) \cdot k(D_2) = 2 \cdot 2 = 4$$

dvoznamenkasta broja.

Primjer 24.

Koliko različitih uređenih r-torki možemo formirati koristeći se elementima skupa

$$A = \{1, 2, ..., n\}$$

najviše jednom?

Dakle, zanima nas kardinalni broj skupa

$$B = \{(x_1, x_2, ..., x_r) : x_1, x_2, ..., x_r \in A \text{ i } x_i \neq x_j \text{ za sve } i, j \in A, i \neq j\},$$

Budući da prvu komponentu možemo izabrati na n načina, drugu na $n - 1$ način i tako dalje, a posljednju r-tu na $n - r + 1$ način, prema načelu 2 imamo da je

$$k(B) = n \cdot (n - 1) \cdot ... \cdot (n - r + 1)$$

ili

$$k(B) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ako se od n međusobno različitih elemenata formiraju uređene r-torke ($r \leq n$) u kojima se elementi ne ponavljaju i pritom se vodi računa o poretku elemenata, dobivamo varijacije bez ponavljanja r-tog razreda od n elemenata. Očito je da se one mogu dobiti ako permutiramo sve kombinacije bez ponavljanja r-tog razreda od n elemenata. Zato se ukupan broj varijacija bez ponavljanja r-tog razreda od n elemenata može izračunati formulom

$$V_n^r = K_n^r P_r,$$

odnosno

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot n \cdot ... \cdot n \cdot (n-r+1). \tag{8}$$

Uočimo da iz (8) proizlazi da su permutacije poseban slučaj varijacija. Naime, ako je $r = n$, onda je

$$V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n.$$

Primjer 25.

Na nekoj su željezničkoj pruzi postaje S_1, S_2 i S_3 . Koliko različitih putnih karata postoji za sva moguća putovanja tom prugom?

Rješenje

U postaji S_1 možemo kupiti kartu ili za S_2 ili za S_3. Slično, u postaji S_2 možemo kupiti kartu ili za S_1 ili za S_3, a u postaji S_3 možemo kupiti kartu ili za S_1 ili za S_2. Dakle, navedenom prugom moguće je realizirati jedno od sljedećih 6 putovanja:

$$\text{iz } S_1 \text{ u } S_2, \quad \text{iz } S_1 \text{ u } S_3,$$

$$\text{iz } S_2 \text{ u } S_1, \quad \text{iz } S_2 \text{ u } S_3,$$

$$\text{iz } S_3 \text{ u } S_1, \quad \text{iz } S_3 \text{ u } S_2.$$

Jasno je da se putovanje iz, primjerice, S_1 u S_2 bitno razlikuje od putovanja S_2 u S_1 pa za ta dva putovanja postoje i različite karte.

Dakle, u razmatranom primjeru riječ je varijacijama bez ponavljanja drugog razreda od 3 elementa.

Primjer 26.

Koliko ima željezničkih postaja na nekoj pruzi ako za sva moguća putovanja tom prugom postoji 930 različitih putnih karata?

Rješenje

Označimo sa

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

skup svih postaja na toj pruzi. U prethodnom primjeru uočili smo da se karta koja vrijedi za putovanje iz mjesta S_i u mjesto S_j razlikuje od karte namijenjene putovanju iz S_j u S_i. Također se podrazumijeva da se iz S_i ne može putovati u S_i ni za jedno $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Prema tome, iz skupa S biramo dva različita elementa i pri tome pazimo koji je element prvi (iz koje stanice polazimo), a koji je element drugi (kamo putujemo). To znači da je riječ o varijacijama bez ponavljanja drugog razreda od n elemenata. Iz uvjeta zadatka slijedi jednadžba

$$V_n^2 = 930,$$

odnosno

$$n(n-1)=930.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe jesu:

$$n_1=30,\ n_2=31.$$

Budući da mora biti $n \in \mathrm{N}$, zaključujemo da je

$$n=31,$$

tj. na navedenoj željezničkoj pruzi nalazi se ukupno 31 postaja.

Primjer 27.

U vrećici se nalazi 30 (različitih) slova abecede. Nasumce izvlačimo 3 slova i to jedno po jedno bez vraćanja. Koliko troslovčanih riječi možemo sastaviti na opisani način?

Rješenje

Očito je riječ o varijacijama bez ponavljanja (izvučeno slovo ne vraća se u vrećicu!) 3. razreda od 30 elemenata, pa imamo

$$V_{30}^{3}=30\cdot 29\cdot 28=24360,$$

različitih troslovčanih (ne nužno suvislih) riječi.

1.2.6. Varijacije s ponavljanjem

Problem 6.

Pretpostavimo da igramo mastermind sa 6 boja: crvenom, žutom, smeđom, zelenom, plavom i narančastom. Koliko različitih kôdova možemo sada formirati koristeći se četirima čepićima?

Rješenje

Problem 6 općenitiji je problem od problema 5 jer smo izostavili zahtjev da su čepići različitih boja. To znači da i za prvu i za drugu i za treću i za četvrtu poziciju kandidiraju čepići svih (raspoloživih) boja, pa je ukupan broj različitih kôdova (načelo 2).

Uočimo da smo pri rješavanju ovog problema formirali uređene četvorke i da smo dozvoljavali ponavljanje elemenata od kojih su sastavljene. To znači da, općenito, kad imamo uređene r-torke kod kojih je dozvoljeno i ponavljanje može biti i $r>n$.

Primjer 28.

Koliko se može napisati troznamenkastih brojeva pomoću znamenaka 5 i 6? Napišite te brojeve.

Rješenje

Pomoću znamenaka 5 i 6 možemo napisati sljedeće troznamenkaste brojeve:

555	566
556	656
565	665
655	666

Dakle, traženih troznamenkastih brojeva je ukupno 8.

Primjer 29.

Koliko različitih uređenih r-torki možemo formirati koristeći se elementima skupa

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}?$$

Rješenje

Sada ne zahtijevamo da su komponente uređenih r-torki različite. To znači da treba izračunati kardinalni broj skupa

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) : x_1, x_2, \ldots, x_r \in A\}.$$

Očito je da svaku od r komponenata možemo izabrati na n načina (budući da ponavljanje elemenata skupa A nije zabranjeno, podrazumijevamo da je dozvoljeno), pa budući da je kardinalni broj Kartezijeva umnoška skupova jednak umnošku kardinalnih brojeva tih skupova (načelo 2), to je

$$k(B) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ faktora}} = n^r$$

Varijacije s ponavljanjem jesu varijacije kod kojih se elementi u uređenim *r*-torkama mogu i ponavljati. Ukupan broj varijacija s ponavljanjem *r*-tog razreda od *n* elemenata računamo formulom

$$\text{(9)} \qquad \overline{V}_n^r = n^r.$$

Sada vidimo da smo primjer 28 mogli riješiti i bez eksplicitnog nabrajanja koristeći se formulom (9):

$$\overline{V}_2^3 = 2^3 = 8.$$

Primjer 30.

Knjižničar želi obilježiti knjige pomoću 5 znakova u nizu i to tako da su prva dva znaka neka slova abecede, a preostala tri neke brojke dekadskog sustava. Koliko knjiga može obilježiti na taj način ako se:

a) ni slova ni brojke ne smiju ponavljati,

b) i slova i brojke smiju ponavljati?

Rješenje

a) Prvo slovo biramo između 30 slova abecede, pa ga možemo izabrati na 30 načina. Drugo slovo biramo između preostalih 29 slova abecede, tj. možemo ga izabrati na 29 različitih načina. Dakle, dva različita slova možemo izabrati na

$$30 \cdot 29 = 870$$

različitih načina.

Prva brojka jedan je od elemenata skupa

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

tj. možemo je izabrati na 10 načina. Drugu brojku možemo izabrati na 9, a treću na 8 načina, što (prema načelu 2) znači da tri različite brojke dekadskog sustava možemo izabrati na

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

različitih načina.

Budući da svakoj dvoslovčanoj "riječi" možemo pridružiti 720 (različitih) troznamenkastih brojeva, zaključujemo da knjižničar može na navedeni način obilježiti ukupno

$$870 \cdot 720 = 626\,400$$

knjiga.

Zadatak smo mogli riješiti i na sljedeći način. Knjižničar najprije bira dvočlane skupine iz skupa od 30 elemenata, što znači da ih je ukupno

$$V_{30}^2 = 870,$$

zatim tročlane skupine iz skupa od 10 elemenata, a budući da je ovakvih skupina

$$V_{10}^{3} = 720,$$

ukupno može obilježiti

$$V_{30}^{2} \cdot V_{10}^{3} = 626\ 400$$

knjiga.

b) Sada je dozvoljeno ponavljanje i slova i znamenki, pa knjižničar može obilježiti ukupno

$$\overline{V}_{30}^{2} \cdot \overline{V}_{10}^{3} = 30^2 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^5 = 900\ 000$$

knjiga.

Ovaj primjer ujedno ukazuje na mogućnost da razlikujemo proizvode izrađene u serijskoj proizvodnji obilježavajući ih pomoću znakova – u praksi je to obično kombinacija slova i znamenaka kao i u posljednjem primjeru.

1.3. Binomni teorem

Već se u osnovnoj školi uči da se **kvadrat zbroja** može izračunati koristeći se formulom

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

a **kvadrat razlike** formulom

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Poznato je da se navedene formule dobiju primjenom definicije kvadrata. Npr.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

budući da za množenje realnih brojeva vrijedi zakon komutacije, tj. $ab = ba$.

Na analogan način možemo izračunati i, primjerice, sedmu potenciju zbroja dvaju realnih brojeva. Tada imamo:

$$(a+b)^7 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$$

Podsjetimo se: nekoliko se binoma množi međusobno tako da se svaki član svakog binoma pomnoži svakim članom svakog od preostalih binoma i dobiveni umnošci algebarski zbroje. Dobivamo

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Očito je da primjena navedenog pravila nije komplicirana, ali postupak je to mukotrpniji što je eksponent binoma $a + b$ veći. Pokazat ćemo kako se može jednostavnije izračunati

$$(a + b)^7,$$

a zatim dobiveni rezultat poopćiti na izračunavanje izraza

$$(a + b)^n,$$

gdje je n proizvoljan prirodni broj.

Ako znamo koliko puta pri svakom koraku množimo a samim sobom, odmah znamo i koliko puta množimo b samim sobom. Na primjer, uz a^3 mora dolaziti b^4 jer znači da smo međusobno pomnožili prve članove u tri od sedam binoma $a + b$, pa zato u četiri preostala binoma moramo međusobno množiti druge članove, tj. broj b. Budući da od 7 binoma $a + b$ treba uzeti 3 puta prvi član, a to možemo učiniti na

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

načina, zaključujemo da je koeficijent uz jednak broju kombinacija trećeg razreda od 7 elemenata, tj. broju 35. Na istovjetan način možemo odrediti i druge koeficijente, pa imamo

$$(a+b)^7 = \binom{7}{7} a^7 b^0 + \binom{7}{6} a^6 b^1 + \binom{7}{5} a^5 b^2 + \binom{7}{4} a^4 b^3 +$$

$$+ \binom{7}{3} a^3 b^4 + \binom{7}{2} a^2 b^5 + \binom{7}{1} a^1 b^6 + \binom{7}{0} a^0 b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Analognim razmatranjem može se dokazati da vrijedi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

ili, kraće pisano,

(10) $$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Posebno, ako umjesto b stavimo $-b$, imamo

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Teorem 2. (BINOMNI TEOREM)

Budući da se brojevi

$$\binom{n}{k},$$

gdje je $n \in \mathbf{N}$, a $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, pojavljuju kao koeficijenti u razvoju binoma, nazivaju se **binomnim koeficijentima**. Oni se mogu poredati u **Pascalov trokut**:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$

....

koji ima sljedeća svojstva:

1. prvi i posljednji broj u svakom retku jest 1,
2. ostali se brojevi dobiju tako da se zbroj dvaju susjednih brojeva nekog retka upiše u idući red između njih, na primjer, između 1 i 1 upišemo 2, ispod 1 i 2 upišemo 3 i tako dalje. Budući da su brojevi koji se pojavljuju u Pascalovom trokutu binomni koeficijenti, možemo ga pisati i na sljedeći način:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

....

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{k} \cdots \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \cdots \binom{n+1}{k} \cdots \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

....

Teorem 3.

Za binomne koeficijente vrijedi identitet

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

Dokaz

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$=\binom{n}{k}.$$

Uočimo da Pascalov trokut predstavlja samo primjenu teorema 3.

Zadatci

1. Odredi kardinalni broj sljedećih skupova:

a) $A = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } 3x - 1 = 0\}$;

b) $B = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } 3x^2 - 1 = 0\}$;

c) $C = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 - 1 = 0\}$;

d) $D = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } (3x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0\}$;

e) $A = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x < 101\}$;

f) $F = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x \geq 100\}$;

g) $G = C \in \mathbf{E}$;

h) $H = E \setminus F$;

i) $I = E \cup F$.

2. Zadani su skupovi:

$A = \{x : x$ je redni broj dana u mjesecu$\}$,

$B = \{x : x$ je redni broj mjeseca u godini$\}$,

$C = \{x : x$ je godina u 20. stoljeću$\}$.

a) Na koji način možeš interpretirati neke elemente skupa $D = A \times B \times C$? Koristeći se dobivenim rezultatom, napiši datum svog rođenja.

b) Odredi $k(D)$.

3. Pokaži da se jednakost

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$$

reducira na jednakost

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B)$$

ako i samo ako je $A \cap B = \varnothing$, tj. samo ako su skupovi A i B disjunktni.

4. Ako su skupovi A i B disjunktni i ako za njih vrijedi jednakost

$$k(A \cup B) = k(A),$$

što zaključuješ o skupu B?

5. Ako neprazni skupovi A i B nisu disjunktni i ako za njih vrijedi jednakost

$$k(A \cup B) = k(A),$$

što zaključuješ o skupu B?

6. Prilikom bacanja kocke, čije strane su označene brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, rezultat svakog bacanja jest jedan broj iz skupa

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Napiši sljedeće skupove:

a) $A = \{x : x \in E \text{ i } x \text{ je paran broj}\}$;

b) $B = \{x : x \in E \text{ i } x \text{ je prost broj}\}$;

c) $C = \{x : x \in E \text{ i } x \text{ nije djeljiv sa } 3\}$.

Odredi kardinalni broj skupa $D = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

7. Bacamo najprije novčić, a zatim kocku. Rezultat tog pokusa jest element skupa

$$E = \{(x, y) : x \in \{P, G\} \text{ i } y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

gdje P znači da se na novčiću pojavilo “pismo”, a G “grb”. Napiši sljedeće skupove:

a) $A = \{(x, y) \in E : x \text{ je pismo, a } y \text{ je paran broj}\}$;

b) $B = \{(x, y) \in E : y \text{ je prost broj}\}$;

c) $C = \{(x, y) \in E : x \text{ je grb, a } y \text{ je neparan broj}\}$;

d) $D = B \cap C$; e) $E = c(B) \cap C$;

f) $F = c(B) \cup c(C)$; g) $G = A \cup c(B \cap C)$,

a zatim im odredi kardinalni broj.

8. U jednom danu u nekoj mesnici 58 kupaca kupi po jedan kilogram junetine, a 37 po jedan kilogram piletine. Koliko je kupaca u tom danu posluženo u toj mesnici ako ih je 15 kupilo i po jedan kilogram junetine i po jedan kilogram piletine?

9. Pregledom 1000 osoba utvrđeno je sljedeće:

216 redovito puši cigare,

336 redovito puši cigarete,

192 redovito puši lulu,

72 redovito puši cigare i lulu,

64 redovito puši cigare i cigarete,

48 redovito puši cigarete i lulu,

16 redovito puši i cigare i cigarete i lulu.

a) Koliko je nepušača pregledano?

b) Koliko pregledanih redovito puši samo cigarete?

10. Izračunaj:

a) $5!$; b) $10!$; c) $\dfrac{30!}{25!}$.

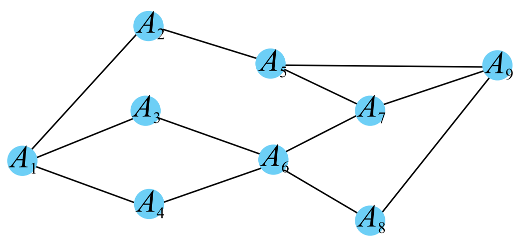
11. Ispitivanje se provodi pomoću anketnog lista koji se sastoji od 20 pitanja. Ako su za prvih 10 pitanja ponuđena po 4 odgovora, a za preostala pitanja po 3, koliko se najviše može dobiti različito popunjenih anketnih listova?

12. Na koliko se različitih načina mogu permutirati slova od kojih su sastavljene riječi:

    a) ŠKOLA; b) MATEMATIKA; c) EKONOMIJA?

13. U knjižnici je 5 knjiga: jedna s crvenim, dvije s plavim, jedna s crnim uvezom i jedna neuvezana knjiga. Na koliko načina (s obzirom na boju uveza) možemo poredati navedene knjige pazeći pri tome da neuvezana knjiga ne bude s kraja?

14. Ulice nekog grada shematski su prikazane na slici 6, gdje smo s A_i, $i \in \{1, 2, ..., 9\}$ označili raskrižja ulica. Koristeći se stablom, odredite na koliko se načina može stići iz a da se pri tome ne prođe dva puta ni jednim raskrižjem.



slika 6.

15. Koliko se različitih signala, koji se sastoje od 8 zastavica koje vise na jednom konopcu jedna ispod druge, može sastaviti ako se upotrijebe 3 identične plave, 3 identične bijele i 2 identične crvene zastavice?

16. Na koliko se načina mogu složiti 4 knjige iz matematike, 5 iz ekonomije, 3 iz prava i 6 iz književnosti ako se knjige iz istog predmeta moraju nalaziti zajedno?

17. Zadano je 7 točaka od kojih nikoje 3 nisu kolinearne (tj. ne leže na istom pravcu). Na koliko se raličitih načina one mogu međusobno spojiti izlomljenom crtom?

18. Ako 5 paralelnih pravaca, koji leže u ravnini π, presječemo sa 4 međusobno paralelna pravca, koji također leže u ravnini π, koliko paralelograma dobijemo?

19. Poopći prethodni zadatak na slučaj kada imamo po dva snopa od odnosno pravaca koji svi leže u istoj ravnini.

20. Koji poligon ima a) dva puta više stranica nego dijagonala; b) točno dvije stranice više nego dijagonala?

21. U ravnini je zadano: a) 5; b) 10; c) 77 točaka od kojih nikoje 3 ne leže na istom pravcu. Koliko pravaca određuju navedene točke?

22. Dokaži: broj prostornih dijagonala prizme, čija je baza n-terokut, jednak je

$$n \cdot (n-3).$$

23. Odredi $n \in \mathbf{N}$ za koji je:

a) $P_n = 120$; b) $P_n^{2,2} = 180$; c) $K_n^3 = 35$;

d) $\overline{K}_n^3 = 84$; e) $V_n^2 = 132$; f) $\overline{V}_n^4 = 4096$.

24. Neko društvo ima 50 članova. Koristeći se načelom 2, izračunaj na koliko načina članovi tog društva mogu izabrati predsjednika, dopredsjednika i blagajnika ako jedna osoba ne može istovremeno obnašati dvije funkcije.

25. Tajna šifra sastoji se od 2 slova abecede poslije kojih dolaze 3 različite znamenke dekadskog sustava. Koliko se različitih šifara može sastaviti na opisani način ako prva znamenka ne može biti nula?

26. Koliko ima a) troznamenkastih; b) peteroznamenkastih; c) deveteroznamenkastih brojeva u kojima se ne ponavlja ni jedna znamenka dekadskog sustava?

27. Koliko se različitih trinaesteroslovčanih riječi (ne nužno suvislih) može sastaviti od slova koja formiraju riječ KOMBINATORIKA?

28. Između gradova A i B postoji 5, a između gradova B i C 6 autobusnih linija.

a) Koliko autobusnih linija postoji između gradova A i C ako se putuje preko grada B?

b) Na koliko se načina može otputovati iz A u C i zatim vratiti u A ako se oba puta putuje preko grada B?

c) Na koliko se načina može realizirati putovanje opisano pod b) ako se za povratak ne koriste linije kojima se putovalo iz A u C?

29. U kutiji je 10 različitih kuglica. Na koliko načina možemo odabrati 3 kuglice ako kuglice izvlačimo jednu po jednu i nakon svakog izvlačenja:

a) vraćamo; b) ne vraćamo u kutiju?

30. 34 učenika jednog razreda treba podijeliti u 4 grupe: dvije grupe od po 10 učenika igrat će nogomet jedna protiv druge, a dvije grupe od po 7 učenika košarku. Na koliko načina možemo formirati navedene grupe?

31. Imamo 8 ispravnih i 3 neispravna različita proizvoda. Na koliko ih načina možemo poredati u niz tako da:

a) svi neispravni proizvodi budu jedan do drugoga;

b) jedan neispravan proizvod bude na početku, drugi u sredini (tj. na šestom mjestu), a treći na kraju tog niza;

c) bar dva neispravna proizvoda budu jedan do drugoga?

32. 4 djevojke i 4 mladića idu zajedno u kino i imaju ulaznice za isti red (u kojem je upravo 8 stolaca). Na koliko načina mogu sjediti za vrijeme predstave ako:

a) su brojeve sjedišta izvlačili prije predstave nasumce,

b) žele da sve djevojke budu jedna do druge,

c) žele da sve djevojke budu jedna do druge, ali i da svi mladići budu zajedno,

d) žele da na dvije susjedne stolice ne sjede osobe istog spola?

33. Poopći prethodni zadatak na slučaj kad k djevojaka i k mladića idu zajedno u kino i imaju ulaznice za isti red u kojemu je $2k$ stolaca.

34. Koristimo znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 bez ponavljanja.

a) Koliko možemo dobiti troznamenkastih brojeva?

b) Koliko možemo dobiti troznamenkastih brojeva manjih od 500?

c) Koliko je dobivenih troznamenkastih brojeva neparno?

d) Koliko je dobivenih troznamenkastih brojeva djeljivo s 5?

e) Koliko je dobivenih troznamenkastih brojeva djeljivo s 3?

35. Riješi prethodni zadatak ako je dopušteno ponavljanje znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

36. Izračunaj:

a) $\binom{5}{2}$; b) $\binom{7}{3}$; c) $\binom{13}{3}$; d) $\binom{100}{2}$.

37. Pokaži da je $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}$, a zatim poopći rezultat, tj. pokaži da je

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

38. Koristeći se prethodnim zadatkom, izračunaj:

a) $\binom{100}{98}$; b) $\binom{50}{47}$; c) $\binom{68}{65}$; d) $\binom{75}{71}$.

39. Izračunaj:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$; b) $\dfrac{n!(n+1)}{(n+1)!}$; c) $\binom{n}{n-1}$.

40. Odredi $n \in \mathbf{N}$ za koji je:

a) $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{4}$; b) $\binom{n+2}{3} = \frac{7}{2}\binom{n}{2}$; c) $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 31$;

d) $\binom{n}{n-2} = 35$; e) $\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} = 55$.

41. Pokaži da je $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

42. Pokaži da je $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

43. Koristeći se binomnim teoremom, dokaži: ako je skup S skup s konačno mnogo elemenata n, onda za partitivni skup skupa S, $P(S)$, vrijedi

$$k(P(S)) = 2^n.$$

44. Koristeći se binomnim teoremom, pokaži da je

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{-1}\binom{n}{n} = 0.$$

45. Pokaži da vrijedi jednakost $\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right)^2 = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$.

46. Koristeći se binomnom formulom, prikaži:

a) $(x+2)^3$; b) $(x+2)^4$; c) $(2x+1)^4$; d) $(2x+1)^5$; e) $(2x-1)^5$; f) $(2x-1)^6$.

47. Koristeći se binomnom formulom, prikažite:

a) $(z-2)^5$; b) $(3-2z)^4$; c) $(2z-3)^4$;

d) $(1-z)^6$; e) $(3+4z)^4$; f) $(z-1)^7$.

48. Koristeći se binomnom formulom, prikaži:

a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^3$; b) $\left(3 - \frac{1}{x}\right)^4$; c) $\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)^4$.

49. Koristeći se binomnom formulom, prikaži:

a) $(x-2y)^4$; b) $\left(x - \frac{2}{y}\right)^4$; c) $\left(2xy - \frac{3}{z}\right)^4$;

d) $(\sqrt{xy} - 1)^4$; e) $(3 + \sqrt[3]{z})^4$.

50. Odredi a) drugi, b) četvrti, c) šesti član u razvoju binoma $\left(2x+\frac{1}{y}\right)^7$.

51. Odredi a) prvi, b) peti, c) deveti član u razvoju binoma $(2x + 3y)^{10}$.

52. Odredi $a \in \mathbf{R}$ takav da je koeficijent uz treći član u razvoju binoma $(2x + ay)^7$ jednak 2688.

53. Odredi $a \in \mathbf{R}$ takav da je koeficijent uz treći član u razvoju binoma $\left(xy-\frac{a}{y}\right)^7$ jednak 35.

54. Odredi $a \in \mathbf{R}$ takav da je koeficijent uz treći član u razvoju binoma $\left(2ax^3-\frac{\sqrt{y}}{8}\right)^8$ jednak 16384.

55. Odredi $a \in \mathbf{R}$ takav da je koeficijent uz treći član u razvoju binoma $(\sqrt{xy}-a\sqrt{z})^9$ jednak 84.

56. Odredite n tako da koeficijent uz četvrti član u razvoju binoma $(1 + x)^n$ bude dvostruko veći od koeficijenta uz prvi član u razvoju navedenog binoma.

57. Odredite n tako da koeficijent uz drugi član u razvoju binoma $(2 + 3x)^n$ bude za 6 puta veći od koeficijenta uz prvi član u razvoju navedenog binoma.

58. Odredite n tako da koeficijent uz peti član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{2x}+x^2\right)^n$ bude trostruko veći od koeficijenta uz četvrti član u razvoju navedenog binoma.

59. Odredite n tako da koeficijenti uz sedmi član i osmi član u razvoju binoma $\left(xy+\frac{x}{y}\right)^n$ budu međusobmo jednaki.

60. U razvoju binoma $(x + 1)^n$ odredi koeficijent uz x^3 ako je poznato da se u tom binomnom razvoju podudaraju koeficijenti drugog i osmog člana.

61. U razvoju binoma $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ odredi koeficijent uz x^4 ako je poznato da se u tom binomnom razvoju podudaraju koeficijenti četvrtog i osmog člana.

62. U razvoju binoma odredi koeficijent uz x^{-2} ako je poznato da je u tom binomnom razvoju koeficijent uz šesti član dvostruko veći od koeficijenta uz peti član.

Rješenja

1. a) $k(A) = 1$; b) $k(B) = 2$; c) $k(C) = 0$; d) $k(D) = 2$; e) $k(E) = 100$;
   f) $k(F)$ nije definirano, jer skup F nema konačno mnogo elemenata; g) $k(G) = 0$; h) $k(H) = 99$;
   i) $k(C \cup F)$ nije definirano.
2. a) Neke elemente skupa D možemo interpretirati kao datum u 20. stoljeću.
   b) $k(D) = 36\,525$ (broj dana u 20. stoljeću).

3. Ako je $A \cup B = \varnothing$ onda je $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = k(A) + k(B)$, jer je $k(\varnothing) = 0$. S druge strane, ako je $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$, zaključujemo da je $k(A \cap B) = 0$, a to znači da je $A \cap B = \varnothing$.

4. $B = \varnothing$

5. $B \subseteq A$.

6. a) $A = \{2, 4, 6\}$; b) $B = \{2, 3, 5\}$; c) $C = \{1, 2, 4, 5\}$; d) $k(D) = 5$.

7. a) $A = \{(P, 2), (P, 4), (P, 6)\}$; b) $B = \{(P, 2), (P, 3), (P, 5), (G, 2), (G, 3), (G, 5)\}$;
c) $C = \{(G, 1), (G, 3), (G, 5)\}$; d) $D = \{(G, 3), (G, 5)\}$; e) $E = \{(G, 1)\}$;
f) $F = \{(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6), (G, 1), (G, 2),(G, 4), (G, 6)\}$; g) $G = F$.

8. 80.

9. a) 424; b) 240.

10. a) 120; b) 3628800; c) 17100720.

11. $4^{10} \cdot 3^{10} = 12^{10}$.

12. a) $5! = 120$; b) $\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$; c) $\dfrac{9!}{2!} = 181440$.

13. $P_5^2 - 2P_4^2 = 36$.

14. 12.

15. $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 1680$.

16. $4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4! = 298\,598\,400$

17. $\dfrac{9!}{2} = 2520$.

18. $K_5^2 \cdot K_4^2 = \binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 60$.

19. $K_{p_1}^2 \cdot K_{p_2}^2 = \binom{p_1}{2}\cdot\binom{p_2}{2}$.

20. a) $n = 4$; b) $n = 4$.

21. a) $\binom{5}{2} = 10$; b) $\binom{10}{2} = 45$; c) $\binom{77}{2} = 2926$.

22. Jedan kraj dijagonale možemo izabrati na $\binom{n}{1}$ način, a drugi (budući da je riječ o prostornoj dijegonali) na $\binom{n-3}{1}$ načina. Dakle, broj prostornih dijagonala je $\binom{n}{1}\binom{n-3}{1} = n(n-3)$.

23. a) $n = 5$; b) $n = 6$; c) $n = 7$;
d) $n = 7$, jer iz $K_n^3 = \binom{n+2}{3} = 84$ slijedi: $(n + 2)(n + 1)n = 3! \cdot 84 = 9 \cdot 8 \cdot 7$;
e) $n = 12$, jer je $132 = 12 \cdot 11$; f) pa je $n = 8$.

24. $50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$.

25. $30^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 9^2 \cdot 10^4 = 810\,000$.

26. a) $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$; b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$; c) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920$.

27. $P_{13}^{2,2,2,2} = \dfrac{13!}{(2!)^4} = 389\,188\,800$.

28. a) 30; b) 900; c) 600.

29. a) $\overline{V}_{10}^{3} = 1000$; b) $V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

30. $\binom{34}{10}\binom{24}{10}\binom{14}{7}\binom{7}{7} \approx 4.448 \cdot 10^{21}$.

31. a) Ako neispravni proizvodi moraju biti jedan do drugoga, možemo ih promatrati kao jedan proizvod, pa navedenih 11 ispravnih i neispravnih proizvoda možemo poredati na 9! načina. Ali budući da 3 različita neispravna proizvoda možemo poredati u niz na 3! načina, traženo možemo učiniti na 9!3! = 2 177 280 načina.

b) Prema načelu 2 imamo 3 · 8 · 7 · 6 · 5 · 2 · 4 · 3 · 2 · 1 · 1 = 8! · 3! = 241920 mogućnosti.

c) Na $\binom{3}{2}$ načina možemo od 3 različita neispravna proizvoda odabrati 2, koja možemo poredati na 2! načina. Promatramo li ta dva proizvoda kao jedan, možemo navedenih 11 proizvoda poredati na 10! načina, što znači da traženo možemo učiniti na $\binom{3}{2} \cdot 2! \cdot 10! = 3! \cdot 10! = 21\ 772\ 800$ načina.

32. a) 8! = 40 320; b) 5! · 4! = 2 880; c) 2 · $(4!)^2$ = 1152.

33. a) $(2k)!$; b) $(k + 1)! \cdot k!$; c) $(k!)^2$.

34. a) $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$;

b) Znamenka stotica je iz skupa {1, 2, 3, 4}, a znamenka desetica i jedinica iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Dakle, možemo dobiti 4 · (7 – 1) · (7 – 2) = 4 · 6 · 5 = 120 troznamenkastih brojeva manjih od 500.

c) Znamenka jedinica je iz skupa {1, 3, 5, 7}. Ako su i znamenke stotica i znamenka desetica paran broj, tj. iz skupa {2, 4, 6}, onda imamo ukupno 3 · 2 · 4 = 24 troznamenkasta broja. Ako su i znamenka stotica i znamenka desetica neparan broj, tj. iz skupa {1, 3, 5, 7}, onda imamo 4 · 3 · 2 = 24 troznamenkasta broja. Ako je znamenka stotica paran broj, a znamenka desetica neparan ili znamenka stotica paran, a znamenka desetica paran broj, onda imamo 3 · 4 · 3 + 4 · 3 · 3 = 72 troznamenkasta broja. Dakle, ukupno je 24 + 24 + 72 = 120 neparnih troznamenkastih brojeva. Do ovog rezultata smo mogli doći i bez korištenja načela 2. Naime, od 7 brojeva 4 su neparna, a troznamenkastih brojeva je 210, pa je neparnih troznamenkastih brojeva $\frac{4}{7} \cdot 210 = 120$.

d) Budući da znamenka jedinica mora biti 5, to je ukupno 6 · 5 = 30 troznamenkastih brojeva djeljivo s 5.

e) 72.

35. a) $7^3 = 343$; b) 4 · 7 · 7 = 196; c) 7 · 7 · 4 = 196; d) 7 · 7 · 1 = 49; e) 109.

36. a) 10; b) 35; c) 286; d) 4 950.

37. $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{4}$. Poopćenje: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

38. a) 4 950; b) 19 600; c) 50 116; d) 1 215 450.

39. a) $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; b) 1; c) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

40. a) Ne postoji $n \in \mathbf{N}$ s traženim svojstvom. b) $n = 5$, c) $n = 5$, d) $n = 7$, e) $n = 10$.

41. Izraz na lijevoj strani treba pomnožiti s $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$.

42. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$.

S druge strane je $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$.

43. Prazan skup je podskup svakog skupa, pa je $\varnothing \in P(S)$ Ukupno je $\binom{n}{1}$ jednočlanih podskupova skupa S, $\binom{n}{2}$ dvočlanih; općenito je $\binom{n}{k}$ k-članih podskupova skupa S, tj. broj elemenata skupa $P(S)$ je $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

44. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \cdot 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$

45. Vrijednost i lijeve i desne strane jednakosti je $2^{2n} = 4^n$.

46. a) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; b) $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48x + 16$;

c) $(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$;

d) $(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$;

e) $(2x+1)^5 = 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$;

f) $(2x-1)^6 = 64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 80x^2 - 12x - 1$.

47. a) $(z-2)^5 = z^5 - 10z^4 + 40z^3 - 80z^2 + 80z - 32$;

b) $(3-2z)^4 = 81 - 216z + 216z^2 - 96z^3 + 16z^4$;

c) $(2z-3)^4 = 16z^4 - 96z^3 + 216z^2 - 216z + 81$;

d) $(1-z)^6 = 1 - 6z + 15z^2 - 20z^3 + 15z^4 - 6z^5 + z^6$;

e) $(3+4z)^4 = 81 + 432z + 864z^2 + 768z^3 + 256z^4$;

f) $(z-1)^7 = z^7 - 7z^6 + 21z^5 - 35z^4 + 35z^3 - 21z^2 + 7z - 1$.

48. a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^3 = x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3}$; b) $\left(3 - \frac{1}{x}\right)^4 = 81 - \frac{108}{x} + \frac{54}{x^2} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x^4}$;

c) $\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)^4 = 16 - \frac{96}{x^2} + \frac{216}{x^4} - \frac{216}{x^8} + \frac{81}{x^{16}}$.

49. a) $(x-2y)^4 = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$;

b) $\left(x - \frac{2}{y}\right)^4 = x^4 - \frac{8x^3}{y} + \frac{24x^2}{y^2} - \frac{32x}{y^3} + \frac{16}{y^4}$;

c) $\left(2xy - \frac{3}{z}\right)^4 = 16x^4y^4 - \frac{96x^3y^3}{z} + \frac{216x^2y^2}{z^2} - \frac{216xy}{z^3} + \frac{81}{z^4}$;

d) $(\sqrt{xy} - 1)^4 = x^2y^2 - 4xy\sqrt{xy} + 6xy - 4\sqrt{xy} + 1$;

e) $(3 + \sqrt[3]{z})^4 = 81 + 108\sqrt[3]{z} + 54\sqrt[3]{z^2} + 12z + z\sqrt[3]{z}$.

50. a) $\frac{448x^6}{y}$; b) $\frac{560x^4}{y^3}$; c) $\frac{84x^2}{y^5}$.

51. a) $1024x^{10}$; b) $5184x^6y^4$; c) $26244x^2y^8$.

52. $a \in \{-2, 2\}$.

53. $a \in \{-1, 1\}$.

54. $a = -2$.

55. $a = -1$.

56. $n = 5$.

57. $n = 4$.

58. $n = 9$.

59. $n = 13$.

60. 56, jer je $n = 8$.

61. 120, jer je $n = 10$, a $k = 3$.

62. 4032, jer je $n = 9$, a $k = 5$.