

1. SKUPHOVI I FUNKCIJE

1.

Zadani su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{a, c, d, e\}$. Navedite elemente skupove $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$ i skupa $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2.

Izračunajte udaljenost točaka $A(17 + \sqrt{10}, 17 - \sqrt{10})$ i $B(17 - \sqrt{10}, 17 + \sqrt{10})$. Rezultat djelomično korjenujte.

3.

U školi je 530 učenika. 423 uči francuski jezik, 240 njemački, a 77 ne uči niti jedan od tih dvaju jezika. Izračunajte koliko učenika uči oba jezika.

4.

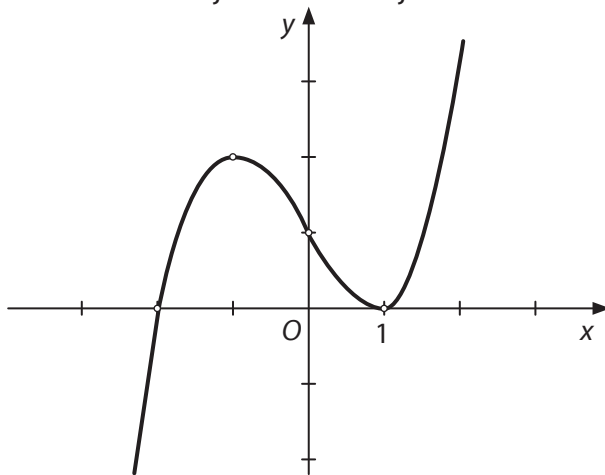
Zadani su intervali realnih brojeva $A = [-1, 7]$, $B = [2, 5]$ i $C = [3, 10]$. Napišite u obliku intervala skupove $E = A \cup C$, $F = A \cap (B \cup C)$ i $G = (A \setminus B) \cap C$.

5.

Točke $A(u, 3)$ i $B(1, 15)$ rubovi su dužine \overline{AB} . Odredite broj u tako da duljina dužine bude jednaka 13. Napišite oba rješenja.

6.

U koordinatnom sustavu desno nacrtan je graf funkcije $y = f(x)$. Nacrtajte grafove funkcija $g_1(x) = 2f(x)$, $g_2(x) = f(x - 1)$ i $g_3(x) = f(x) - 1$.



7.

Zadani su skupovi realnih brojeva:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 = 0\}, C = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{5}{12} = 0\}.$$

Napišite elemente skupova A, B, C i $(A \cup B) \cap C$.

8.

Riješite sljedeće zadatke.

- Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4\}$. Napišite elemente skupova $B \times (A \setminus B)$ i $(A \cap B) \times (A \cup B)$.
- Skup M ima točno 16 podskupova, među njima su i podskupovi $\{c, i, u\}$ i $\{a, c\}$. Napišite elemente skupa M i sve njegove tročlane podskupove.
- Skup $V = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ ima podskup $W = \{8, 9, 10\}$. Izračunajte koliko podskupova skupa V sadrži skup W i koliko podskupova skupa V ima s W neprazan presjek.

9.

Riješite sljedeće zadatke.

- Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0\}$ i $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 3|x - 2| - x = 6\}$. Napišite sve elemente skupa $C = A \times B$.
- Neka je $D = \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos x - \sin x = 0\}$, a E skup apscisa točaka u kojima funkcija $f(x) = \sin 2x$ postiže maksimum na intervalu $[0, \pi]$. Odredite elemente $F = D \cup E$. Koliko elemenata ima skup svih podskupova skupa F ?
- Zadani su skupovi točaka u ravnini: $K = \{(x, y) \mid 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0\}$, $L = \{(x, y) \mid y - x + 3 \geq 0\}$ i $M = \{(x, y) \mid y > -2\}$. Nacrtajte u koordinatnom sustavu skup točaka $N = (K \cap L) \setminus M$.

RJEŠENJA

1.

$$A = \{a, b\}, B = \{a, c, d, e\};$$

$$A \cap B = \{a\}, A \cup B = \{a, b, c, d, e\}, A \setminus B = \{b\}, B \setminus A = \{c, d, e\},$$

$$A \times B = \{(a, a), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e)\}, C = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{b, c, d, e\}.$$

2.

$$A(17 + \sqrt{10}, 17 - \sqrt{10}), B(17 - \sqrt{10}, 17 + \sqrt{10});$$

$$|AB| = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (-2\sqrt{10})^2} = \sqrt{40 + 40} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}.$$

3.

$$|F| = 423, |NJ| = 240;$$

$$530 = |F| + |NJ| - |F \cap NJ| + 77, |F \cap NJ| = 423 + 240 + 77 - 530, |F \cap D| = 210.$$

4.

$$A = [-1, 7], B = [2, 5], C = [3, 10];$$

$$E = A \cup C = [-1, 10], B \cup C = [2, 10], F = A \cap (B \cup C) = [2, 7]$$

$$A \setminus B = [-1, 2) \cup \langle 5, 7], G = (A \setminus B) \cap C = \langle 5, 7].$$

5.

$$A(u, 3), B(1, 15), |AB| = 13;$$

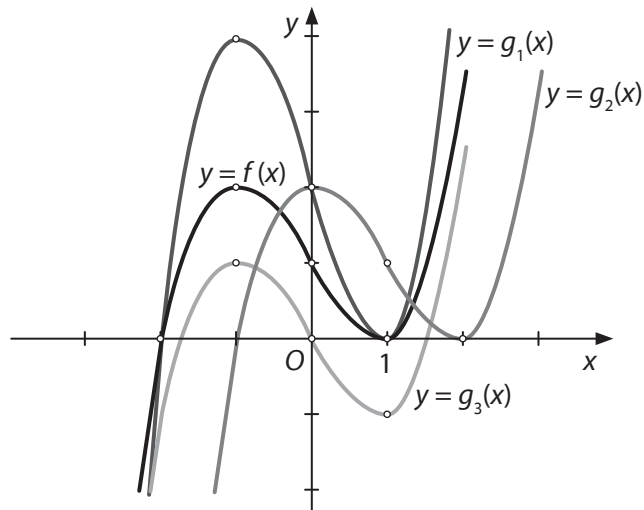
$$\sqrt{(u-1)^2 + (3-15)^2} = 13, (u-1)^2 = 25, u-1 = \pm 5, u = 1 \pm 5, u_1 = -4, u_2 = 6.$$

6.

$g_1(x)$ se dobije tako da se ordinata svake točke $f(x)$ pomnoži s 2.

$g_2(x)$ se dobije tako da se graf $f(x)$ translira za 1 udesno.

$g_3(x)$ se dobije tako da se graf $f(x)$ translira za 1 prema dolje.


7.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0, x^2(x+1) - (x+1) = 0, (x+1)(x^2 - 1) = 0, (x+1)^2(x-1) = 0; A = \{-1, 1\};$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0, x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{2}; B = \{-1, \frac{5}{2}\};$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{5}{12} = 0 \quad x = \frac{5}{2}; C = \left\{ \frac{5}{2} \right\};$$

$$A \cup B = \{-1, 1, \frac{5}{2}\}, (A \cup B) \cap C = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

8.

a) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\};$

$$A \setminus B = \{1, 2\}, B \times (A \setminus B) = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\};$$

$$A \cap B = \{3\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}; (A \cap B) \times (A \cup B) = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\};$$

- b) Broj podskupova skupa od n elemenata jest 2^n . Iz $2^n = 16$ zaključujemo da je $n = 4$, to jest skup M ima 4 elementa. Budući da su skupovi $\{e, i, u\}$ i $\{a, e\}$ podskupovi skupa M , to je moguće samo ako je $M = \{a, e, i, u\}$. Tročlani podskupovi skupa M jesu: $\{a, e, i\}, \{a, e, u\}, \{a, i, u\}, \{e, i, u\}$.

- c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $W = \{8, 9, 10\}$. Iz ovoga zaključujemo da je $|V \setminus W| = 7$. Zato je broj podskupova skupa V koji sadrže skup W jednak $2^7 = 128$. Broj podskupova skupa V koji sa skupom W imaju prazan presjek jednak je $2^{10} - 2^7 = 896$.

9.

a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (2x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; A = \left\{-\frac{1}{2}\right\};$

$$3|x-2| - x = 6 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6; B = \{0, 6\}; C = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 6\right)\right\}.$$

b) $\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow D = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\};$

zbog $x \in [0, 2\pi]$ imamo $E = \left\{\frac{\pi}{4}\right\};$

$$F = D \cup E = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}. \text{ Skup } F \text{ ima}$$

$2^2 = 4$ podskupa.

- c) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 1 = 0,$
 $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36.$ Skup K jest elipsa kao na slici. L i M su poluravnine $y < 2$, odnosno $y \geq x - 3$. Zato je skup N luk parabole istaknut na slici.

